Kolokwium nr 2 z **analizy matematycznej I.1**

20 stycznia 2022, 15:00 – 17:50

Rozwiązanie każdego zadania **musi** mieścić się na oddzielnych kartkach. Proszę starannie podpisać (imię, nazwisko, nr indeksu, grupa ćwiczeniowa) wszystkie oddane arkusze! **Nie wolno korzystać z notatek, pomocy koleżeńskiej, kalkulatorów, telefonów ani innych środków telekomunikacji.**

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia, lematy, ...

Zadanie 1 (10 pkt.). Odpowiedź ustna.

Zadanie 2 (10 pkt.). Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{7+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}-\sqrt{7-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}\right)^{\alpha}$$

w zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3 (10 pkt.). Zbadać zbieżność i bezwzględną zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\left(\sqrt[n]{7^{(\sqrt{n}-1)}}-1\right).$$

Uwaga. $\lfloor x \rfloor = \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$.

Zadanie 4 (10 pkt.). Obliczyć granice

$$\textbf{(a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x^2)-1}{\ln(2x^4+1)}, \qquad\qquad \textbf{(b)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{3^x-3^{x^2}}{\sin(\pi x)},$$

lub wykazać, że granice nie istnieją.

Zadanie 5 (10 pkt.). Załóżmy, że $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą spełniającą warunek $8f(1) = f(4)$. Wykaż, że istnieje $x \in [1,2]$ spełniający $2^x f(x) = f(2x)$.

Zadanie 6 (10 pkt.). Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^a+\sin n}$$

w zależności od parametru $a > 0$.